箙ヘッケ超代数について (ホップ代数と量子群 : 応用の可能性)

土岡, 俊介

数理解析研究所講究録
第1840巻 2013年 165-174

箙ヘッケ超代数について

(On the quiver Hecke superalgebras)

東京大学カブリ数物連携宇宙研究機構　土岡俊介 (Shunsuke Tsuchioka)*
Kavli Institute for the Physics and Mathematics of the Universe, Todai Institutes for Advanced Study

1 はじめに

柏原正樹氏（京都大学）と Seok-Jin Kang 氏（ソウル大学）との共同研究で、我々は Khovanov-Lauda-Rouquier 代数のスーパー版にあたる代数を導入した [KKT, Definition 3.1]。

2012年9月初旬に、増岡彰氏（筑波大学）と和久井道久氏（関西大学）が主催された研究集会「ホップ代数と量子群–応用の可能性」では、[KKT] の内容のうち、研究の動機について詳しく講演させていただいたので、本報告集原稿も基本的にはその際の講演にしたがって、[KKT] の動機について復習をさせていただこうと思う。

数学的に厳密な定義や定理を述べるよりも、気楽に読めるように日本語でごまかしている箇所もあるが [1]、ざっと目を通していただいて、我々の研究に興味をもっていただけたら幸いである。

以下では、体 $\mathbf{k}$ 上の代数 A について、$\mathsf{MOD}(A)$ は A-加群のなすアーベル圏を、$\mathsf{Mod}(A)$ は有限次元 A-加群のなす $\mathsf{MOD}(A)$ の充満部分アーベル圏を意味している。また超代数 A について [2]、その有限次元超 A-加群圏 $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(A)$ やその同値な既約表現の集合 $\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(A))$、および de(super)categorification である Grothendieck 群 $\mathsf{K}_0^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(A))$ をどう定義するのかについては説明しない。いくつか候補があるので、[Kl2, §12] あるいは [KKT, §2] を参照されたい。また Kac-Moody Lie 環や量子群に関しては [Kac, Kas, Lus] などを参照されたい。

2 対称群のモジュラー表現論

定義 2.1. R を可換整域とし、$q \in R$ を取る。(A 型) 岩堀・ヘッケ環 $\mathcal{H}_n(q, R)$ とは、$\{T_i \mid 1 \leq i < n\}$ で生成され、以下を定義関係式に持つ R-代数である（$1 \leq a \leq n-2$ かつ $1 \leq b, c < n$ で $|b-c| > 1$）。

$$(T_b+1)(T_b-q)=0, \quad T_aT_{a+1}T_a = T_{a+1}T_aT_{a+1}, \quad T_bT_c = T_cT_b.$$

まず対称群のモジュラー表現論を思い出そう。すなわち群環 $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n = \mathcal{H}_n(1_{\mathbb{F}_p}, \mathbb{F}_p)$ の有限次元加群圏 $\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n)$ の考察のことであるが（ここで $p \geq 2$ は素数）、次のことが認識されている。

「$\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ の表現論と、$\mathcal{H}_n(\sqrt[p]{1}, \mathbb{C})$ の表現論は似ている [3]」

*tshun@kurims.kyoto-u.ac.jp, The research was supported by Research Fellowships for Young Scientists 23-8363, Japan Society for the Promotion of Science.

[1] ただし、基本的には文献を挙げるので、正確な事柄についてはそれらを参照していただきたい。

[2] 超代数とは $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数付き代数（定義 2.3 で $\mathbb{Z}$ の現れを $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ に置き換えたもの）の別名である。

[3] $\mathbb{C}$ は、$\sqrt[p]{1}$ が存在する正標数の体に置き換えても良い場合も多いが、LLTA 理論を参照するために $\mathbb{C}$ としておく。

例えば、以下の現象が知られている。ここで$\ell \geq 2$は自然数だが、$\mathbb{F}_\ell$に現れるℓのみ素数を意味している。また$A_\ell^{(1)}$型アフィンDynkin図形については、5ページ先の図1を参照。

- 有限次元既約表現の同値類の集合$\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n))$や$\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})))$は、$A_{\ell-1}^{(1)}$型量子群$U_v(\mathfrak{g}(A_{\ell-1}^{(1)}))$から決まるKashiwara crystal構造$B(\Lambda_0)$でparameterizeでき、さらに$B(\Lambda_0)$によって分岐則のいくつかの情報を統制できる[Bra, Kl1]。

$$\bigsqcup_{n\geq 0}\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n)) \cong B(\Lambda_0) \cong \bigsqcup_{n\geq 0}\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C}))).$$

- $\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n)$や$\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C}))$は、$A_{\ell-1}^{(1)}$型Kac-Moody Lie環$\mathfrak{g}(A_{\ell-1}^{(1)})$の基本加群$V(\Lambda_0)$（の適当な格子の双対$V(\Lambda_0)_{\mathbb{Z}}^*$）を圏論化する（Ariki's categorification [Ari]）。

$$\bigoplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}(\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n)) \cong V(\Lambda_0)_{\mathbb{Z}}^* \cong \bigoplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C}))).$$

このように$\mathbb{F}_\ell\mathfrak{S}_n$と$\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})$は似ているのだが、$\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})$については、幾何学的表現論の手法を使うことによって、より強いことが言える（Lascoux-Leclerc-Thibon-Ariki理論）。

定理 2.2 ([LLT, Ari]). 任意の$\ell \geq 2$について、

$$\bigsqcup_{n\geq 0}\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C}))) \hookrightarrow \bigoplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C}))) \cong V(\Lambda_0)_{\mathbb{Z}}^*(\in \mathsf{MOD}(U(\mathfrak{g}(A_{\ell-1}^{(1)}))))$$

の像は、$V(\Lambda_0)_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}^*(\in \mathsf{MOD}(U_v(\mathfrak{g}(A_{\ell-1}^{(1)}))))$上の*Kashiwara-Lusztig*の双対標準基底の$v=1$における**特殊化**と一致する。

LLTA理論によって、$\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})$の（decomposition numberなどの）表現論的な量を、量子群に付随する量に対応させられる。対称群のp-モジュラー表現論のいくつかの部分は、$\mathcal{H}_n(\sqrt[p]{1},\mathbb{C})$のそれと一致すると予想されており[Jam, §4]、この予想を信じるならば、対称群のp-モジュラー表現論についてもいくつかの情報が得られたことになる。

定義 2.3. Aを体$\mathbb{F}$上の（$\mathbb{Z}$-）次数付き代数とする。すなわちAは体$\mathbb{F}$上の代数であって、任意の$i,j\in\mathbb{Z}$について$A_iA_j \subseteq A_{i+j}$となる$\mathbb{F}$-ベクトル空間の分解$A=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}A_i$を持つ[4]。

(a) $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$は有限次元左次数付き$A$-加群と次数を保つ$A$-準同型からなるアーベル圏を意味する。

(b) $\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$の対象$M=\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}}M_i$と$k\in\mathbb{Z}$について、$M\langle k\rangle$とは任意の$n\in\mathbb{Z}$について$(M\langle k\rangle)_n = M_{k+n}$となる$\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$の対象の略記法である。割り当て$(M\xrightarrow{f}N)\longmapsto(M\langle k\rangle\xrightarrow{f}N\langle k\rangle)$は$\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$上の自己アーベル圏同値を与える。この同値を$\langle k\rangle$と書く。

(c) $M,N\in\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$について、$M\sim N$とは、ある$k\in\mathbb{Z}$が存在して$\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A)$の中で$M\langle k\rangle\cong N$となること略記法を意味する。

「次数を忘れると全単射$\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))/\sim\ \xrightarrow{\sim}\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(A))$が得られる」などのように、次数付きの表現論を考えることによって、多くの場合より精密な情報が得られることに注意しよう[5]。特に、$\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))$は$v=[\langle -1\rangle]$によって$\mathbb{Z}[v,v^{-1}]$-加群構造を持つ。すなわち$\mathbb{F}$-代数$A$に次数があれば，圏論化を通じてdecategorificationである$\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}(A))$の量子化$\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(A))$が得られる。この一般論と、定理2.2を見比べると、以下が示唆される。

[4]このとき$1\in A_0$が自動的に導出される。

[5]例えば、重複度のような非負整数は、$v=1$を代入するとその値になるような、非負整数係数ローラン多項式になる。

「実は $\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})$ には非自明な次数が存在して、定理 2.2 は「任意の $\ell \geq 2$ について、

$$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})))/\sim \longrightarrow \bigoplus_{n\geq 0} \mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C}))) \cong V(\Lambda_0)^*_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}$$

の像は、$V(\Lambda_0)^*_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}$ 上の双対標準基底と一致する。」と精密化出来るのではないか」

ここで $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ と $\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1},\mathbb{C})$ の類似を思い出せば、

「$\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ には Ariki's categorification の量子群版を与える次数が存在しているのではないか」

ということが示唆されていたことが了解されると思う。

3 Khovanov-Lauda-Rouquier 代数

定義 3.1 ([Rou, §3.2.1]). $\mathbb{F}$ を体、I を有限集合とし、$Q=(Q_{ij}(u,v)) \in \mathsf{Mat}_I(\mathbb{F}[u,v])$ を $Q_{ii}=0$ かつ、任意の $i,j \in I$ について $Q_{ij}(u,v)=Q_{ji}(v,u)$ となるように取る。$n \geq 0$ について、*KLR* 代数 $R_n(\mathbb{F};Q)$ とは $\{x_p,\tau_a,e_\nu \mid 1\leq p\leq n, 1\leq a<n, \nu\in I^n\}$ で生成され、次を定義関係式に持つ $\mathbb{F}$ 上の単位的結合的代数である。

- $e_\mu e_\nu=\delta_{\mu\nu}e_\mu, 1=\sum_{\mu\in I^n} e_\mu$, $x_px_q=x_qx_p$, $x_pe_\mu=e_\mu x_p$,
- $\tau_a\tau_b=\tau_b\tau_a$ *if* $|a-b|>1$,
- $\tau_a^2 e_\nu = Q_{\nu_a,\nu_{a+1}}(x_a,x_{a+1})e_\nu$, $\tau_a e_\mu = e_{s_a(\mu)}\tau_a$,
- $\tau_a x_p = x_p\tau_a$ *if* $p\neq a,a+1$,
- $(\tau_a x_{a+1}-x_a\tau_a)e_\nu=(x_{a+1}\tau_a-\tau_a x_a)e_\mu=\delta_{\nu_a,\nu_{a+1}}e_\nu$,
- $(\tau_{b+1}\tau_b\tau_{b+1}-\tau_b\tau_{b+1}\tau_b)e_\nu=\delta_{\nu_b,\nu_{b+2}}((x_{b+2}-x_b)^{-1}(Q_{\nu_b,\nu_{b+1}}(x_{b+2},x_{b+1})-Q_{\nu_b,\nu_{b+1}}(x_b,x_{b+1})))e_\nu$.

定義 3.2 ([Rou, §3.2.3]). $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ を対称化可能な *GCM* とし、$d=(d_i)_{i\in I}$ を A の *symmetrization* とする[6]。$Q^A=(Q^A_{ij}(u,v))\in\mathsf{Mat}_I(\mathbb{F}[u,v])$ を、以下を満たすように取る[7]。

$$Q^A_{ii}(u,v)=0,\quad Q^A_{ij}(u,v)=Q^A_{ji}(v,u),\quad t_{i,j,-a_{ij},0}=t_{j,i,0,-a_{ij}}\neq 0.$$

ここで $i,j\in I$ かつ、$Q^A_{ij}(u,v)=\sum_{\substack{p,q\geq 0\\ pd_i+qd_j=-d_ia_{ij}}} t_{ijpq}u^pv^q$ である。

$n\geq 0$ と $\beta\in I^n$ について、$R_n(\mathbb{F};Q^A)$ は以下の割り当てによって $\mathbb{Z}$-次数付き代数となる。

$$\mathsf{deg}(e_\nu)=0,\quad \mathsf{deg}(x_pe_\nu)=2d_{\nu_p},\quad \mathsf{deg}(\tau_ae_\nu)=-d_{\nu_a}a_{\nu_a,\nu_{a+1}}.$$

一応、KLR 代数の正確な定義を書いたが、本稿では、対称化可能な GCM $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ について、適当に 2 変数多項式たち $Q^A=(Q^A_{ij}(u,v))_{i,j\in I}$ を取ると、

直交冪等元 $\{e_\nu\}$	多項式生成元 $\{x_i\}$	Coxeter 生成元（のような）$\{\tau_j\}$

で生成される KLR 代数 $R_n(\mathbb{F};Q)$ が定まると思ってもらえれば十分である。I が 1 点集合（すなわち $A=A_1=(2)$）の場合、KLR 代数 $R_n(\mathbb{F};Q^{A_1})$ はニル・ヘッケ環 NH_n と同じものである。

KLR 代数は以下の意味で、量子群の半分（の Lusztig 格子の双対）を圏論化する。

定理 3.3 ([KL1, KL2, Rou]). 対称化可能な *GCM* A と任意の体 $\mathbb{F}$ について、*twisted bialgebra* として以下の同型が成立する。

$$\bigoplus_{n\geq 0}\mathsf{K}_0(\mathsf{Mod}_{\mathsf{gr}}(R_n(\mathbb{F};Q^A)))\cong U_v^-(\mathfrak{g}(A))^*_{\mathbb{Z}[v,v^{-1}]}.$$

[6]すなわち、任意の $i,j\in I$ について $d_ia_{ij}=d_ja_{ji}$ が成立していて、$(d_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}^I_{>0}$ かつ $\mathsf{gcd}(d_i)_{i\in I}=1$ である。
[7]例えば $i\neq j$ について $Q_{ij}(u,v)=u^{-a_{ij}}+v^{-a_{ji}}$ と取ることが出来る。

一方で、A 型退化アフィン・ヘッケ環 $\mathcal{H}_{n,R}^{\mathrm{deg,aff}}$ を考えよう。

定義 3.4. R を可換整域とする。A 型退化アフィン・ヘッケ環 $\mathcal{H}_{n,R}^{deg,aff}$ とは、$\{s_j \mid 1 \le j < n\} \cup \{x_i \mid 1 \le i \le n\}$ で生成され、以下を定義関係式に持つ R-代数である（$1 \le a \le n-2$, $1 \le b, c < n$, $1 \le i, j, k \le n$ かつ $1 \le b, c < n$ で $|b-c| > 1, k \ne b, b+1$）。

(a) $s_b^2 = 1$, $s_a s_{a+1} s_a = s_{a+1} s_a s_{a+1}$, $s_b s_c = s_c s_b$, $x_i x_j = x_j x_i$,

(b) $s_b x_k = x_k s_b$, $s_b x_b = x_{b+1} s_b - 1$, $s_b x_{b+1} = x_b s_b + 1$.

定義 3.5. $\mathbf{k}$ を体とし、$I := \mathsf{Image}(\mathbb{Z} \to \mathbf{k}) \subseteq \mathbf{k}$ をその素整域とする。有限次元 $\mathcal{H}_{n,\mathbf{k}}^{deg,aff}$ 加群 M が整であるとは、任意の $1 \le i \le n$ について、x_i の M への作用の固有値が全て I に属することを言う[8]。$\mathcal{H}_{n,\mathbf{k}}^{deg,aff}$ の整表現からなる $\mathsf{Mod}(\mathcal{H}_{n,\mathbf{k}}^{deg,aff})$ の充満部分アーベル圏を $\mathsf{Rep}(\mathcal{H}_{n,\mathbf{k}}^{deg,aff})$ と書く。

ここで、以上の 2 つの定義は、以下の 2 つの点で対称群の表現論と関係している。

(i) 可換整域 R について、群環 $R\mathfrak{S}_n$ は $\mathcal{H}_{n,R}^{\mathrm{deg,aff}}$ の準同型像になっている。具体的には、以下の R-代数全射準同型が存在する（ここで $L_i = \sum_{j=1}^{i-1}(j,i) \in R\mathfrak{S}_n$ は Jucys-Murphy 元）。

$$\mathcal{H}_{n,R}^{\mathrm{deg,aff}} \twoheadrightarrow R\mathfrak{S}_n, \quad s_j \mapsto s_j, x_i \mapsto L_i.$$

(ii) 素数 p について $\mathsf{Rep}(\mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{deg,aff}})$ は $A_{p-1}^{(1)}$ 型 Kac-Moody Lie 環の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))$ の半分（の Kostant 格子の双対）を圏論化する [Kl2, §9]。

$$\bigoplus_{n\ge 0} \mathsf{K}_0(\mathsf{Rep}(\mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{deg,aff}})) \cong U^-(\mathfrak{g}(A_{p-1}^{(1)}))^*_{\mathbb{Z}}.$$

特に 2 番目の事実から、$\mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{deg,aff}}$ と $A_{p-1}^{(1)}$ 型 KLR 代数には何らかの関係が存在することが示唆されるが、KLR 代数に関する PBW 定理を示す議論から以下を示すことが出来る。

定義 3.6. $\ell \ge 2$ を自然数とするとき、$Q_\ell \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}[u,v])$ を以下で定義し、体 $\mathbb{F}$ について $Q_\ell^{\mathbb{F}} \in \mathsf{Mat}_{\mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}}(\mathbb{F}[u,v])$ を Q_ℓ の自然な像とする。

$$(Q_\ell)_{i,j} = \begin{cases} -(u-v)^2 & (\ell = 2 \text{ かつ } i \ne j) \\ \pm(v-u) & (\ell \ge 3 \text{ かつ } j = i \pm 1) \\ 1 & (\ell \ge 3 \text{ かつ } j \ne i, i \pm 1) \\ 0 & (\text{それ以外}). \end{cases}$$

定理 3.7 ([Rou, Proposition 3.18]). $p \ge 2$ を素数とし、I を（代数的）部分集合 $\mathbb{F}_p^n \subseteq \mathbb{A}_{\overline{\mathbb{F}_p}}^n$ の $\overline{\mathbb{F}_p}[x_1, \cdots, x_n]$ における定義イデアル、$J = \langle x_1, \cdots, x_n \rangle \subseteq \overline{\mathbb{F}_p}[x_1, \cdots, x_n]$ とすると、以下の $\overline{\mathbb{F}_p}$-代数同型を得る（ここで両辺にはそれぞれ自然な代数構造が入ることが少し考えると分かる）。

$$\varprojlim_k \mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{deg,aff} / I^k \mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{deg,aff} \cong \varprojlim_k R_n(\overline{\mathbb{F}_p}; Q_p^{\overline{\mathbb{F}_p}}) / J^k R_n(\overline{\mathbb{F}_p}; Q_p^{\overline{\mathbb{F}_p}})$$

つまり、$\mathsf{Rep}(\mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{deg,aff}})$ と、「各 $x_k e(\nu)$ が冪零に作用する表現からなる $\mathsf{Mod}(R_n(\overline{\mathbb{F}_p}; Q_p^{\overline{\mathbb{F}_p}}))$ の充満部分圏」は同値になるのである [Rou, Theorem 3.19]。このように、A 型退化アフィン・ヘッケ環と KLR 代数の対応は、適当に局所化と完備化を取ることで得られる。また定理 3.7 から、以下が得られる [Rou, Corollary 3.20][9]。

[8] $M = \bigoplus_{(i_j)_{j=1}^n \in I^n} \{m \in M \mid 1 \le \forall j \le n, \exists N > 0, (x_j - i_j)^N m = 0\}$ と広義固有空間に分解されることと同値。

[9] [BK1, Theorem 1.1] では直接互いの逆写像を構成して直接証明している。

定理 3.8 ([BK1, Rou]). 素数 $p \geq 2$ について、$\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ は KLR 代数の商 $R_n(\mathbb{F}_p; Q_p^{\mathbb{F}_p})/\langle x_1^{\delta_{0,\nu_1}} e(\nu)\rangle_{\nu=(\nu_j)_{j=1}^n \in \mathbb{F}_p^n}$ と $\mathbb{F}_p$-代数同型である。

$e(\nu)$ や $x_1 e(\nu)$ は共に斉次（次数はそれぞれ 0,2）であることを思い出すと、定理 3.8 によって $\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ には次数が輸入される。これが Ariki's categorification の量子化を与えるのである [BK2]。

4 対称群のモジュラー射影表現論

以上で説明したように、対称群のモジュラー表現論について結果を得る際にも、$\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n$ の affinization である A 型退化アフィン・ヘッケ環 $\mathcal{H}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{deg,aff}}$ を考えることは本質的である。また、定理 3.8 の $\mathcal{H}_n(\sqrt[\ell]{1}, \mathbb{C})$ 版（ここで $\ell \geq 2$ は自然数）もほとんど同じ形で述べることが出来るが、これを得る際にも、A 型岩堀・ヘッケ環の affinization である A 型アフィン・ヘッケ環と KLR 代数の（適当に局所化・完備化をとった）対応が重要になる。この意味で、標語的に

「KLR 代数は、A 型（退化）アフィン・ヘッケ環の一般化である」

と言われることが理解されるだろう。また「B·C·D 型アフィン・ヘッケ環に対応する KLR 代数」が（[EnKa, KM] の予想を証明する過程で）[VV, SVV] で導入されている。このような観点から

「A 型アフィン・ヘッケ環のスーパー類似に対応する KLR 代数のスーパー類似は何だろうか？」

と本研究の動機を述べることが出来る。または、より実際的に以下のようにも言い換えられる。

「対称群の捻じれ群環 $\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-$ について、$\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ について述べてきた結果の類似を得られるか？」

本研究を説明する前に、まずは対称群の射影表現について簡単に触れておこう。

定義 4.1. R を可換整域とする。R 上の対称群の捻じれ群環 $R\mathfrak{S}_n^-$ とは、$\{t_i \mid 1 \leq i < n\}$ で生成され、以下を定義関係式に持つ R-代数である（$1 \leq a \leq n-2$ かつ $1 \leq b, c < n$ で $|b-c| > 1$）。

$$t_b^2 = 1, \quad t_a t_{a+1} t_a = t_{a+1} t_a t_{a+1}, \quad t_b t_c = -t_c t_b.$$

$n \leq 3$ ならば、$R\mathfrak{S}_n^- = R\mathfrak{S}_n$ である。以下では、$\frac{1}{2}, \sqrt{-1} \in R$ となっていないと面倒になるので、

本稿の最後まで、R は標数が 2 ではない体 $R = \mathbf{k}$ で、さらに $\mathbf{k} = \overline{\mathbf{k}}$ と仮定する。

この仮定の下、$H^2(\mathfrak{S}_n, \mathbf{k}^\times) \cong \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \iff n \geq 4$ となるので [Suz, 第 3 章 §2]、対称群の $\mathbf{k}$ 上の射影表現論は、$\mathsf{Mod}(\mathbf{k}\mathfrak{S}_n^-)$ の考察とほぼ同義である。本稿ではとりあえず、$n \geq 0$ について、

(a) $\mathsf{Mod}(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n^-)$ の考察を「対称群の複素射影表現論」、

(b) 奇素数 $p \geq 3$ について $\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-)$ の考察を「対称群のモジュラー射影表現論」

と呼ぶことにしよう。

(a) については、Schur によって 1911 年にまずは指標論的に研究され、現在ではまとまった文献 [Joz, HH, Ste] を読むことが出来る。さて、Nazarov は対称群の複素射影表現の既約加群を構成するために、Young 対称子の類似物を構成した [Naz]。その際、Cherednik による A 型退化アフィン・ヘッケ環を用いた Young 対称子の表示 [Che] にアイデアを得て、A 型退化アフィン・ヘッケ環の類似物 $\mathcal{S}_{n,\mathbb{C}}^{\mathrm{aff}}$ を導入している。現在、これはアフィン Sergeev 環あるいは退化アフィン・ヘッケ・クリフォード環と呼ばれている。

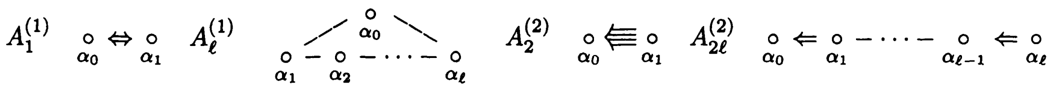

図 1: $A_\ell^{(1)}, A_{2\ell}^{(2)}$ 型アフィン Dynkin 図形 ($\ell \geq 1$)

定義 4.2. アフィン *Sergeev* 環 $\mathcal{S}^{aff}_{n,\mathbf{k}}$ とは、偶生成元 $\{t_j \mid 1 \leq j < n\} \cup \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ と奇生成元 $\{C_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ で生成され、以下を基本関係式に持つ $\mathbf{k}$-超代数である。

- $x_ix_j = x_jx_i,\ C_iC_j + C_jC_i = 2\delta_{i,j}$
- $t_iC_j = C_{s_i(j)}t_i,\ C_ix_i = -x_iC_i$
- $C_ix_j = x_jC_i \ \textit{if}\ i \neq j,$
- $t_i^2 = 1,\ t_it_{i+1}t_i = t_{i+1}t_it_{i+1},\ t_it_j = t_jt_i \ \textit{if}\ |i-j| \geq 2,$
- $t_ix_j = x_jt_i \ \textit{if}\ j \neq i, i+1,$
- $t_ix_i = x_{i+1}t_i - 1 - C_iC_{i+1},\ t_ix_{i+1} = x_it_i + 1 - C_iC_{i+1}.$

定義 4.3. クリフォード環 $\mathcal{C}_n^{\mathbf{k}}$ とは、奇生成元 $\{C_k \mid 1 \leq k \leq n\}$ で生成され、$1 \leq \forall i, \forall j \leq n, C_iC_j + C_jC_i = 2\delta_{i,j}$ を基本関係式に持つ $\mathbf{k}$-超代数である。

さて、捻じれ群環 $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n^-$ は、生成元 t_i を全て奇生成元とすることで超代数と思える。一般に有限次元 $\mathbf{k}$-代数については、超代数の構造が入る場合、超代数と思って $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数付き表現論を考察しても、少なくとも既約表現に関して失われる情報はない [Kl2, Corollary 12.2.10]。今後はいつでも $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n^-$ を超代数と思って、表現も $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-次数付きのものを考えることにする。

命題 4.4 ([Se1, Yam]). アフィン *Sergeev* 環の商 $\mathcal{S}^{aff}_{n,\mathbf{k}}/\langle x_1 \rangle = \mathcal{C}_n^{\mathbf{k}} \rtimes \mathbf{k}\mathfrak{S}_n$ は、超代数としてのテンソル積[10]$\mathbf{k}\mathfrak{S}_n^- \otimes \mathcal{C}_n^{\mathbf{k}}$ と $\mathbf{k}$-超代数として同型である。

定義 4.5. *Sergeev* 環 $\mathcal{Y}_n^{\mathbf{k}}$ とは、超代数 $\mathcal{S}^{aff}_{n,\mathbf{k}}/\langle x_1 \rangle$ のことである。

Sergeev 環 $\mathcal{Y}_n^{\mathbf{k}}$ は、$(\mathbb{C}\mathfrak{S}_n, \mathfrak{gl}_m(\mathbb{C}))$ についての Schur-Weyl 双対性の片側を $\mathfrak{gl}_m(\mathbb{C})$ のスーパー類似である $\mathfrak{q}_m(\mathbb{C})$ に置き換えた場合の研究において導入されたものである (Sergeev 双対性 [Se2])。命題 4.4 は、$\mathcal{Y}_n^{\mathbf{k}}$ と $\mathbf{k}\mathfrak{S}_n^-$ が (スーパー表現論の意味で)「森田同値」であることを主張している [Kl2, Proposition 13.2.2] [KKT, §2.4]。すなわち、対称群のモジュラー射影表現を考える際には、$\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-)$ を考える代わりに $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\mathcal{Y}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}})$ を考えてもほぼ同じになる。

考えたい対称群の表現	対応する代数	affinization
モジュラー線型表現	群環 $\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n$	A 型退化ヘッケ環 $\mathcal{H}^{\mathrm{deg,aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$
モジュラー射影表現	捻じれ群環 $\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^- \overset{森田}{\sim}$ Sergeev 環 $\mathcal{Y}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$	アフィン Sergeev 環 $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$

ただし実際には、$\mathcal{Y}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ やその affinization である $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ を使った方が簡単なようである。この理由に、$\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ 中の $\{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}$ が多項式関係式を満たすことが挙げられる。実際、$\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-$ そのものに affinization を定義出来るが[11]、そこには歪多項式関係式[12]が現れる [Wang, §3.3]。

さて $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\mathbf{k}}$ に関する以下の [BK3] の結果が本研究に関係する。簡単のために、今は $\mathbf{k} = \overline{\mathbb{F}_p}$ (ただし $p \geq 3$) の時のみ述べよう。ここで $\mathsf{Rep}(\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}})$ は整表現からなる $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}})$ の充満部分圏で、以下の結果を述べたすぐ後に定義される。

[10] A, B を超代数とするとき、斉次元 $a_1, a_2 \in A, b_1, b_2 \in B$ について $(a_1 \otimes b_1)(a_2 \otimes b_2) = (-1)^{|b_1||a_2|}(a_1a_2 \otimes b_1b_2)$ で超代数 $A \otimes B$ の積を定義する。一般に $|A| \otimes |B| \ncong |A \otimes B|$ である。

[11] この affinization は $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ と森田同値になる。

[12] $i \neq j$ ならば $x_ix_j = -x_jx_i$ となる、歪可換な関係式のこと。

- $\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Rep}(\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}))$ は量子群 $U_v(\mathfrak{g}(A^{(2)}_{p-1}))$ から決まる Kashiwara crystal 構造 $B(\infty)$ で parameterize でき、さらに分岐則のいくつかの情報を統制できる。

$$\bigsqcup_{n\geq 0} \mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Rep}(\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}})) \cong B(\infty).$$

- $\mathsf{Rep}(\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}})$ は $A^{(2)}_{p-1}$ 型 Kac-Moody Lie 環 $\mathfrak{g}(A^{(2)}_{p-1})$ の普遍包絡環 $U(\mathfrak{g}(A^{(2)}_{p-1}))$ の半分（の Kostant 格子の双対）を「圏論化する」[13]。

$$\bigoplus_{n\geq 0} \mathsf{K}^{\mathsf{su}}_0(\mathsf{Rep}(\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}})) \cong U^-(\mathfrak{g}(A^{(2)}_{p-1}))^*_{\mathbb{Z}}.$$

定義 4.6. 有限次元 $\mathcal{S}^{aff}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$-超加群 M が整であるとは、任意の $1\leq i\leq n$ について、x_i^2 の M への作用の固有値が全て $\{j(j+1)\mid j\in\{0,1,\cdots,(p-1)/2\}(\subseteq\mathbb{F}_p)\}$ に属することを言う。

[BK3] ではさらに議論を進めて $\mathsf{Irr}^{\mathsf{su}}(\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}(\mathcal{Y}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}))$ が量子群 $U_v(\mathfrak{g}(A^{(2)}_{p-1}))$ から決まる Kashiwara crystal 構造 $B(\Lambda_0)$ で（分岐則込みで）parameterize できることを示している。森田同値を通じて考えれば、これはだいたい[14]$\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n))$ が $B(\Lambda_0)$ で（分岐則込みで）parameterize できることになる[15]。$A^{(2)}_{p-1}$ 型量子群の $B(\Lambda_0)$ は p-strict p-restricted な分割で実現できるので [Kan] [Kl2, §22]、$\mathsf{Irr}(\mathsf{Mod}(\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}^-_n))$ が明示的に parameterize されたことになるが[16]、これは近年の対称群のモジュラー射影表現論における進展と言ってよいだろう。

なお [BK3] では $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ をその q-類似であるアフィン・ヘッケ・クリフォード環 $\mathcal{HC}^{\mathrm{aff}}_{n,\mathbf{k}}$ [JN] に置き換えた場合について[17]、$q^2=\sqrt[\text{奇数}]{1}$ の場合に同様の事柄を示している。さらに $q^2=\sqrt[\text{偶数}]{1}$ の場合は [Tsu] で扱われている[18]。また $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\mathbf{k}}$ は A 型 Weyl 群の捻じれ群環と森田同値な Sergeev 環の affinization であったが、ここの A 型を他の型に変えた場合も研究されている [KW1, KW2, KW3, Kho]。

5 箙ヘッケ超代数

$p\geq 3$ を奇素数とすると、 [BK3] の結果と定理 3.3 から、以下が素朴には期待できる。

「$\mathcal{S}^{\mathbf{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ と $R_n(\overline{\mathbb{F}_p};Q^{A^{(2)}_{p-1}})$ の間には、$\mathcal{H}^{\mathbf{deg,aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ と $R_n(\overline{\mathbb{F}_p};Q^{\overline{\mathbb{F}_p}}_p)$ の間にあるような（局所化や完備化を行うこと証明できる）何らかの良い関係があるのではないか？」

我々の研究は、$p=3$ の場合にこの期待の反例を見出すことから始まる [KKT, Remark 5.6]。そこで KLR 代数を拡張し、それと $\mathcal{S}^{\mathrm{aff}}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}$ との関係をつけたことが [KKT] の主定理の 1 つである。

定義 5.1. 対称化可能な GCM $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ のパリティ付けとは、$I=I^{\mathsf{odd}}\sqcup I^{\mathsf{even}}$ なる集合の分割であって、任意の $i\in I^{\mathsf{odd}}$ と任意の $j\in I$ について $a_{ij}\in 2\mathbb{Z}$ となるようなものを言う。

パリティ付きの対称化可能な GCM $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ について、$Q^A=(Q^A_{ij}(u,v))_{i,j\in I}$ を適当な条件を満たすようにとる。KLR 代数の定義パラメータとしての Q^A は $Q^A_{ij}(u,v)\in\mathbf{k}[u,v]$ であった。

[13] [BK3] では $\mathsf{Mod}^{\mathsf{su}}$ がアーベル圏になるように定義されていないので、ここは通常の意味における圏論化ではない。Supercategorification の取り扱いについては [HW, KKO] なども参照されたい。

[14] ここの ambiguity は desuperization をするときの既約超加群の振る舞いに依っている。

[15] 同様の parametrization は [BK4] で異なる手法でも示されている。

[16] この可能性は LLTA 理論に触発されて [LT] で初めて提案された。

[17] Sergeev 環の q-類似としてヘッケ・クリフォード環 [Ols] が知られているが、これは $\mathcal{HC}^{\mathrm{aff}}_{n,\mathbf{k}}$ の商になっている。

[18] $q^2=\sqrt[2\ell]{1}$ とすると、Lie 理論の型としてはアフィン Dynkin 図形 $D^{(2)}_{\ell}$ が出てくる。

$$A_2^{(2)}\quad \underset{\alpha_0}{\odot} \Lleftarrow\!\!\Leftarrow \underset{\alpha_1}{\circ} \qquad A_{2\ell}^{(2)}\quad \underset{\alpha_0}{\odot} \Leftarrow \underset{\alpha_1}{\circ} - \cdots - \underset{\alpha_{\ell-1}}{\circ} \Leftarrow \underset{\alpha_\ell}{\circ}$$

図 2: パリティ付き $A_{2\ell}^{(2)}$ 型 Dynkin 図形。$\odot$ が奇頂点を表す。

我々の定義では $i,j \in I^{\mathrm{odd}}$ の場合のみ、この選択を $Q_{ij}^A(u,v) \in \mathbf{k}\langle u,v\rangle/\langle uv+vu\rangle$ と変更する必要がある。このような A と Q^A について、以下を満たす $(\mathbb{Z}\times(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}))$-次数付きの 2 つの代数「箙ヘッケ・クリフォード超代数 $RC_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A)$」と「箙ヘッケ超代数 $R_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A)$」を定義する [KKT, Definition 3.1,Definition 3.5]。

(a) 超代数としての同型 $RC_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A) \cong R_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A) \otimes \mathcal{C}_n^{\mathbf{k}}$ が成り立つ [KKT, §3.5]。

(b) $I^{\mathrm{odd}} = \emptyset$ のとき、$R_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A)$ は通常の KLR 代数の定義と一致する。

ここで任意の対称化可能な GCM $A=(a_{ij})_{i,j\in I}$ は $I^{\mathrm{odd}}=\emptyset$ が少なくとも 1 つのパリティ付けであることに注意すると、我々が定義した $R_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A)$ は KLR 代数の一般化になっていることに注意しよう。そこで以下、$R_n^{\mathrm{su}}(\mathbf{k};Q^A)$ を単に $R_n(\mathbf{k};Q^A)$ と書こう。なおパリティ付きの対称化可能な GCM は [BKM, §1.4] で既に現れていた概念であり、$R_n(\mathbf{k};Q^A)$ は [BKM] の意味でのスーパー量子群を圏論化する [HW, KKO]。

[KKT, Theorem 5.4] において、図 2 のように $A_{\text{偶数}}^{(2)}$ をパリティ付けをすると、$RC_n^{\mathrm{su}}(\overline{\mathbb{F}_p};Q^{A_{p-1}^{(2)}})$ と $\mathcal{S}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{aff}}$ は適当な局所化と完備化を行うと同型になることを証明した[19]。これは

「$R_n(\overline{\mathbb{F}_p};Q^{A_{p-1}^{(2)}})$ の適当な商代数[20]は、$\mathcal{Y}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{aff}}$ と（スーパー表現論の意味で）森田同値である」

ことを導く。これが §4 で説明した研究動機

「対称群の捻じれ群環 $\overline{\mathbb{F}_p}\mathfrak{S}_n^-$ について、$\mathbb{F}_p\mathfrak{S}_n$ について述べてきた結果の類似を得られるか？」

に対する [KKT] における解答である。$R_n(\overline{\mathbb{F}_p};Q^{A_{p-1}^{(2)}})$ は [HW, KKO] で示された通り、「任意の既約超加群を desuperization しても既約性が保たれる[21]」などの良い性質を持っており、$R_n(\overline{\mathbb{F}_p};Q^{A_{p-1}^{(2)}})$（の商代数）を通じて、対称群のモジュラー射影表現を研究することが今後の課題である。

さて I が 1 点集合で $I=I^{\mathrm{odd}}$ とすると、$R_n(\mathbf{k};Q^{A_1})$ はニル・ヘッケ環 NH_n のスーパー類似

$$\mathrm{NH}_n^{\mathrm{su}} = \left\langle \{x_i\}_{i=1}^n \cup \{\partial_j\}_{j=1}^{n-1} \;\middle|\; \begin{smallmatrix} x_a x_b + x_b x_a = 0 \text{ if } a \neq b, \\ \partial_i^2 = 0, \partial_i\partial_{i+1}\partial_i = \partial_{i+1}\partial_i\partial_{i+1}, \partial_i\partial_j + \partial_j\partial_i = 0 \text{ if } |i-j|>1, \\ x_i\partial_i + \partial_i x_{i+1} = 1, \partial_i x_i + x_{i+1}\partial_i = 1, x_i\partial_j + \partial_j x_i = 0 \text{ if } i \neq j, j+1 \end{smallmatrix} \right\rangle$$

になる[22]。我々はこれまで説明してきた通り、ヘッケ環や対称群の表現論における圏論化の文脈からこの定義に至ったが、[KKT] の投稿約 3 週間後に [ElKh] が arXiv に現れた。ここ（および [EKL]）では $\mathrm{NH}_n^{\mathrm{su}}$ が結び目理論における圏論化の文脈 [LOT] から導入され、さらに [EKL, ElKh, Eli] では対称関数環 $\Lambda = \bigoplus_{n\geq 0} \varprojlim_{m\geq 0} \mathbb{Z}[x_1,\cdots,x_m]_n^{\mathfrak{S}_m}$ のスーパー類似 $O\Lambda$ が**新しいホップ代数として**（$\mathrm{NH}_n^{\mathrm{su}}$ と共に）研究されている。異なる 2 つの圏論化の文脈から $R_n(\mathbf{k};Q^{A_1}) = \mathrm{NH}_n^{\mathrm{su}}$ が独立に導入されたことは興味深いと言ってよいだろう。

---

[19] 実際には [KKT] では $\mathcal{S}_{n,\overline{\mathbb{F}_p}}^{\mathrm{aff}}$ 以外に、$\mathcal{S}_{n,\overline{\mathbb{Q}}}^{\mathrm{aff}}$ や、$\mathcal{S}_{n,\mathbf{k}}^{\mathrm{aff}}$ の q-類似であるアフィン・ヘッケ・クリフォード環 $\mathcal{HC}_{n,\mathbf{k}}^{\mathrm{aff}}$ についても同様の定理を示している [KKT, §4,§5]。Lie 理論の型には $A_\infty, B_\infty, C_\infty, A_n^{(1)}, A_{2n}^{(2)}, C_n^{(1)}, D_n^{(2)}$ が出てくる。

[20] 定理 3.8 と同様に定義される。

[21] [HW] では、このことを “type M phenomenon” と呼んでいる。

[22] I が 1 点集合で $I=I^{\mathrm{even}}$ とすると、$R_n(\mathbf{k};Q^{A_1})$ はニル・ヘッケ環 NH_n と思える。

6 最後に

この度、講演の機会を与えてくださった増岡彰さんと和久井道久さんに感謝いたします。ありがとうございました。

参考文献

[Ari] S. Ariki, *On the decomposition numbers of the Hecke algebra of* $G(m,1,n)$, J. Math. Kyoto Univ. **36** (1996), 789–808.

[BK1] J. Brundan and A. Kleshchev, *Blocks of cyclotomic Hecke algebras and Khovanov-Lauda algebras*, Invent.Math. **178** (2009), 451–484.

[BK2] J. Brundan and A. Kleshchev, *The degenerate analogue of Ariki's categorification theorem*, Math.Z. **266** (2010), 877–919.

[BK3] J. Brundan and A. Kleshchev, *Hecke-Clifford superalgebras, crystals of type* $A_{2\ell}^{(2)}$ *and modular branching rules for* $\widehat{S}_n$, Represent.Theory **5** (2001), 317–403.

[BK4] J. Brundan and A. Kleshchev, *Projective representations of symmetric groups via Sergeev duality*, Math.Z. **239** (2002), 27–68.

[BKM] G. Benkart, S-J. Kang and D. Melville, *Quantized enveloping algebras for Borcherds superalgebras*, Trans.Amer.Math.Soc. **350** (1998), 3297–3319.

[Bra] J. Brundan, *Modular branching rules and the Mullineux map for Hecke algebras of type A*, Proc. London Math. Soc. **77** (1998), 551-581.

[Che] I.V. Cherednik, *On special bases of irreducible finite-dimensional representations of the degenerate affine Hecke algebra*, Funct.Anal.Appl. **20** (1986), 87–89.

[EKL] A. Ellis, M. Khovanov and A. Lauda, *The odd nilHecke algebra and its diagrammatics*, arXiv:1111.1320, to appear in International Mathematics Research Notices.

[ElKh] A. Ellis and M. Khovanov, *The Hopf algebra of odd symmetric functions*, Adv.Math. **231** (2012), 965–999.

[Eli] A. Elis, *The odd Littlewood-Richardson rule*, arXiv:1111.3932, to appear in Journal of Algebraic Combinatorics.

[EnKa] N. Enomoto and M. Kashiwara, *Symmetric crystals and affine Hecke algebras of type B*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **82** (2006), 131–136.

[HH] P. Hoffman and J. Humphreys, *Projective representations of the symmetric groups, Q-functions and shifted tableaux*, Oxford Mathematical Monographs. Oxford Science Publications. The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1992.

[HW] D. Hill and W. Wang, *Categorification of quantum Kac-Moody superalgebras*, arXiv:1202.2769.

[JN] A. Jones and M. Nazarov, *Affine Sergeev algebra and q-analogues of the Young symmetrizers for projective representations of the symmetric group*, Proc. London Math. Soc. **78** (1999), 481–512.

[Jam] G. James, *The decomposition matrices of* $\mathrm{GL}_n(q)$ *for* $n \leq 10$, Proc.London Math.Soc. **60** (1990), 225–265.

[Joz] T. Józefiak, *Characters of projective representations of symmetric groups*, Exposition.Math. **7** (1989), 193–247.

[Kac] V. Kac. *Infinite dimensional Lie algebras*. Cambridge University Press, 1990.

[Kan] S-J. Kang, *Crystal bases for quantum affine algebras and combinatorics of Young walls*, Proc. London Math. Soc. **86** (2003), 29–69.

[Kas] M. Kashiwara, *On crystal bases*, Representations of groups (Banff, AB, 1994), 155–197, CMS Conf.Proc., **16**, Amer.Math.Soc., Providence, RI, 1995.

[Kho] T. Khongsap, *Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras. III, The trigonometric type*, J.Algebra **322** (2009), 2731–2750

[KKO] S-J. Kang, M. Kashiwara and S. Oh, *Supercategorification of quantum Kac-Moody Algebras*, arXiv:1206.5933

[KKT] S-J. Kang, M. Kashiwara and S. Tsuchioka, *Quiver Hecke superalgebras*, arXiv:1107.1039

[KL1] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups. I.*, Represent.Theory **13** (2009), 309–347.

[KL2] M. Khovanov and A. Lauda, *A diagrammatic approach to categorification of quantum groups II.*, Trans.Amer.Math.Soc. **363** (2011), 2685–2700.

[KM] M. Kashiwara and V. Miemietz, *Crystals and affine Hecke algebras of type D*, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. **83** (2007), 135–139.

[Kl1] A. Kleshchev, *Branching rules for modular representations of symmetric groups II*, J. Reine. Angew. Math. **459** (1995), 163–212.

[Kl2] A. Kleshchev, *Linear and projective representations of symmetric groups*, Cambridge Tracts in Mathematics, 163. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[KW1] T. Khongsap and W. Wang, *Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras. I. The classical affine type*, Transform.Groups **13** (2008), 389–412.

[KW2] T. Khongsap and W. Wang, *Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras. II, The rational double affine type*, Pacific J.Math. **238** (2008), 73–103.

[KW3] T. Khongsap and W. Wang, *Hecke-Clifford algebras and spin Hecke algebras IV: odd double affine type*, SIGMA **5** (2009), 012, 27pages.

[LLT] A. Lascoux, B. Leclerc and J-Y. Thibon, *Hecke algebras at roots of unity and crystal bases of quantum affine algebras*, Comm.Math.Phys. **181** (1996), 205–263.

[LOT] R. Lipshitz, P. Ozsváth and D. Thurston, *Bordered Heegaard Floer homology: invariance and pairing*, arXiv:0810.0687.

[LT] B. Leclerc and J-Y. Thibon, *q-deformed Fock spaces and modular representations of spin symmetric groups*, J. Phys. A **30** (1997), 6163–6176.

[Lus] G. Lusztig, *Introduction to quantum groups*, Reprint of the 1994 edition. Modern Birkhaüser Classics. Birkhaüser/Springer, New York, 2010.

[Naz] M. Nazarov, *Young's symmetrizers for projective representations of the symmetric group*, Adv. Math. **127** (1997), 190–257.

[Ols] G. Olshanski, *Quantized universal enveloping superalgebra of type Q and a super-extension of the Hecke algebra*, Lett. Math. Phys. **24** (1992), 93–102.

[Rou] R. Rouquier, *2-Kac-Moody algebras*, arXiv:0812.5023

[Sch] I. Schur, *Über die Darstellung der symmetrischen and der alternierenden Gruppe durch gebrochene lineare Substitutionen*, J. Reine Angew. Math. **139** (1911), 155–250.

[Se1] A.N. Sergeev, *The Howe duality and the projective representations of symmetric groups*, Represent. Theory **3** (1999), 416–434.

[Se2] A.N. Sergeev, *Tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $GL(n,m)$ and $Q(n)$*, Mat. Sb. **123** (1984), 422–430.

[Ste] J. Stembridge, *Shifted tableaux and the projective representations of symmetric groups*, Adv. Math. **74** (1989), 87–134.

[Suz] 鈴木通夫, 群論 上, (1977), 岩波書店.

[SVV] P. Shan, M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and affine Hecke algebras of type D*, Adv. Math. **227** (2011), 267–291.

[Tsu] S. Tsuchioka, *Hecke-Clifford superalgebras and crystals of type $D_l^{(2)}$*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **46** (2010), 423–471.

[VV] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Canonical bases and affine Hecke algebras of type B*, Invent.Math. **185** (2011), 593–693.

[Wang] W. Wang, *Double affine Hecke algebras for the spin symmetric group*, Math.Res.Lett. **16** (2009), 1071–1085.

[Yam] M. Yamaguchi, *A duality of the twisted group algebra of the symmetric group and a Lie superalgebra*, J. Algebra **222** (1999), 301–327.